

ریاضی لذت بخش

در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۲ بیشترین مساحت با محیط مفروض

اشاره



آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی رودهن

کلاس هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می گویم، دبیر ریاضی مان. تفاوت کلاس های ریاضی خانم جمشیدی با بقیه کلاس هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم کننده درس می دهد. به علاوه، به ما اجازه می دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.

اوایل از روش تدریس او تعجب می کردیم و متوجه نمی شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می گیریم: «ریاضی لذت بخش!» به همین خاطر تصمیم گرفتیم کلاس های ریاضی مان و تمام صحبت های ردوبدل شده بین بچه های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستیم شما هم از این مطالب لذت می برید.

جلسه دوم: شنبه ۲۰ آبان ۱۳۹۶

امروز می خواهیم جلسه دوم «ریاضی لذت بخش» و صحبت هایمان را در آن جلسه با شما سهیم شوم. امیدوارم شما هم مانند ما عمیقاً این مطالب را یاد بگیرید و از آن لذت ببرید.

خانم جمشیدی مطابق معمول با لبخندی وارد کلاس شد. پس از سلام و احوال پرسی گفت: «امروز می خواهیم به یک کشاورز کمک کنیم». ما با تعجب به یکدیگر نگاه کردیم. خانم جمشیدی ادامه داد: «اگر یک کشاورز بخواهد حصار مستطیلی با استفاده از ۴۰۰ متر نرده درست کند، طول و عرض آن چقدر باید باشد؟»

من سریع گفتم: «یک مربع با ابعاد ۱۰۰ متر و مساحت ۱۰۰۰۰ متر مربع! اما آیا این

بهترین حالت است؟»

مهمتاب هم فکری کرد و گفت: «او باید مستطیلی به ابعاد ۱۵۰ متر در ۵۰ متر بسازد. البته مساحت زمینش در این حالت فقط ۷۵۰۰ متر مربع می شود.»

باران هم گفت: «اگر ابعاد ۱۰۱ متر در ۹۹ متر باشند، چطور؟ مساحت هم ۹۹۹۹ متر مربع می شود.»

مهمتاب گفت: «به نظر می آید مربع بزرگ ترین مساحت را دارد و مستطیل های دیگر مساحت های کوچک تری دارند. اما چطور می شود این را ثابت کرد؟»

خانم جمشیدی با نگاهی مهربان گفت: «بیایید محیط را ۴a بنامیم به جای ۴۰۰ متر. این طوری حالتی کلی را در نظر گرفته ایم. پس اگر زمین یک مربع بود، اضلاع آن a می شد. حالا اگر به جای طول، a+x قرار

دهیم چه می شود؟

من گفتم: «در این صورت عرض باید a-x باشد تا محیط ۴a شود.»

باران هم حرف مرا تکمیل کرد و گفت: «پس مساحت هم (a+x)(a-x) یا همان $a^2 - x^2$ می شود.»

مهمتاب گفت: «یعنی از a^2 کمتر می شود، مگر اینکه $x=0$ باشد و هر چقدر x بزرگ تر باشد، مساحت کوچک تر می شود.»

موضوعی به نظر من رسید: «حتی اگر x منفی باشد؟ البته منطقی نیست که x منفی باشد، چون ما a+x را طول مستطیل گرفتیم.»

خانم جمشیدی حرف مرا تأیید کرد و گفت: «بله و در هر حالتی با x منفی هم x^2 همچنان مثبت می شود. مربع، مستطیلی است با بیشترین مساحت به ازای محیط مفروض.»



پس حاصل ضرب بزرگ‌تر می‌شود». خانم جمشیدی هم گفت: «دقیقاً همین‌طور است و اگر lh افزایش پیدا کند، حاصل ضرب همهٔ عددها چه می‌شود؟» مهتاب جواب داد: «آن هم افزایش پیدا می‌کند، البته در صورتی که حاصل ضرب بقیهٔ عددها مثبت باشد».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است و به همین دلیل هم ما تأکید می‌کنیم که عددهای مربوطه همه مثبت باشند. بنابراین با نزدیک کردن عددهای انتهایی l و h به طرف هم به ازای یک مقدار مساوی، یکی از آن‌ها را مساوی a به دست می‌آوریم و بعد دست‌نکه می‌داریم».

باران گفت: «پس حالا عدد غیر a یکی کمتر داریم».

مهتاب که فکرش مشغول شده بود، پرسید: «پس حالا ممکن است همهٔ عددها با a مساوی باشند یا نه، دوباره این روند را با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددها ادامه می‌دهیم؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «دقیقاً! و عددها دیگر آن عددهای دفعهٔ قبل نیستند. در هر مرحله حاصل ضرب بیشتر می‌شود و با اولین عددی که مساوی a بشود هم روند را متوقف می‌کنیم».

من هم همین‌طور نتیجه‌گیری کردم: «پس بالاخره همهٔ عددها مساوی a می‌شوند و حاصل ضرب هم می‌شود a^n که بزرگ‌ترین حاصل ضرب است. پس ثابت شد!»

خانم جمشیدی گفت: «بله، این اثبات متعلق به پروفسور پولیاست و برای حل مسائل ماکزی‌م‌سازی به‌کار می‌رود. مثلاً فرض کنید شما می‌خواهید یک جعبهٔ مکعب‌مستطیل شکل را طراحی کنید که بیشترین حجم را داشته باشد و مساحت آن عدد مشخصی باشد. جعبه باید چه شکلی باشد؟»

باران گفت: «حُدس می‌زنم باید مکعب باشد، اما چطور می‌شود ثابت کرد؟» خانم جمشیدی در جواب باران گفت:

مساوی a باشند، پس حاصل ضربشان a^n است».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است. حال اگر عددها مساوی نباشند، حداقل یک عدد کمتر از a و حداقل یک عدد بیشتر از a هست، به شرطی که a میانگین آن‌ها باشد. فرض کنیم کوچک‌ترین عدد را l و بزرگ‌ترین عدد را h بنامیم. اگر l را بزرگ‌تر و به همان میزان h را کوچک‌تر کنیم، حاصل ضرب lh چه می‌شود؟»

من گفتم: «شبیه ساختن یک مستطیل با محیط ثابت است که تقریباً مربع باشد.

به زبان ریاضی، اگر دو متغیر، مجموع ثابت داشته باشند، بیشترین مقدار حاصل ضرب آن‌ها وقتی به دست می‌آید که مقادیر آن‌ها مساوی باشد».

مهتاب پرسید: «برای بیش از دو عدد هم این موضوع صادق است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، اگر همهٔ عددها مثبت باشند، فرض کنید شما n عدد دارید با حاصل جمع na که a میانگین آن‌هاست. اگر همهٔ عددها مساوی آن باشند، حاصل ضرب آن‌ها چقدر می‌شود؟»

باران متفکرانه گفت: «همهٔ عددها باید

«بسیار خوب، ابعاد را w و h می‌نامیم.

مساحت جانبی و حجم چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «حجم $l.w.h$ می‌شود و

مساحت جانبی هم $2lw+2lh+2wh$ است.»

خانم جمشیدی گفت: «درست است و

چون مساحت جانبی ثابت است، پس مقدار

$lw+lh+wh$ هم ثابت است. حالا اگر سه

مقدار lw ، lh ، wh را به جای اینکه با هم

جمع کنید، در هم ضرب کنید، چی به دست

می‌آید؟»

من گفتم: «می‌شود $l^2w^2h^2$ که مربع

حجم است.»

مهتاب هم ادامه داد: «چه جالب شد!

پس اگر مقادیرهای lw ، lh و wh را مساوی

فرض کنیم، مربع حجم بیشترین مقدار

خودش را اختیار می‌کند و بنابراین حجم هم

بیشترین مقدار خودش را دارد.»

خانم جمشیدی گفت: «پس باید طول،

عرض و ارتفاع را مساوی فرض کنید و یک

مربع به دست می‌آید.»

باران گفت: «یک سؤال درباره مسئله

کشاورز دارم که می‌خواست یک حصار

مستطیلی درست کند. حصار هر شکلی

می‌تواند داشته باشد یا نه فقط مستطیل؟

می‌تواند شکل دیگری داشته باشد با مساحتی

بزرگ‌تر از مربع؟»

من گفتم: «فکر می‌کنم باید دایره‌ای

شکل باشد! اما حدس می‌زنم اثباتش سخت

باشد.»

خانم جمشیدی گفت: «درواقع با آنچه

که قبلاً انجام داده‌اید، خیلی سخت نیست.

حداقل نشان داده‌اید هر شکلی که دایره

نیست، می‌تواند با یک متغیر به شکلی تبدیل

شود که مساحت بیشتری با محیط مشابه

داشته باشد. فرض کنید کل طول حصار را

L بنامیم. از نقطه دلخواه A شروع می‌کنیم

و فاصله $\frac{1}{2}L$ را طی می‌کنیم تا به نقطه B

برسیم. حال یک خط مستقیم AB تصور

کنید و دو طرف حصار را در نظر بگیرید.

بین طرف راست و چپ AB طرفی را

انتخاب کنید که مساحت بیشتری داشته

باشد و نرده‌کشی طرف دیگر را طوری تغییر

دهید که قرینه قسمت با مساحت بزرگ‌تر

نسبت به خط AB شود.»

من پرسیدم: «اگر هر دو طرف

مساحت‌های مشابه داشتند چطور؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «در این

دو حالت دو طرف را نسبت به AB قرینه

کنید تا جایگزین یکدیگر شوند. چیزی که

الان داریم یک منحنی بسته نرده‌کشی

شده است که نسبت به AB متقارن است.

فرض کنید P نقطه دلخواهی در یکی از

طرفین باشد و P' تصویر متقارن آن نسبت

به AB باشد. اگر زاویه APB قائمه باشد،

درباره دایره‌ای به قطر AB چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟»

مهتاب گفت: «باید از P رد بشود. ما قبلاً

یاد گرفته‌ایم که مستطیل قطرهای مساوی

دارد که یکدیگر را نصف می‌کنند.»

خانم جمشیدی گفت: «صحیح است.

دایره از همه نقاطی مثل P که زاویه APB

قائم باشد، رد می‌شود. اگر برای همه نقاط

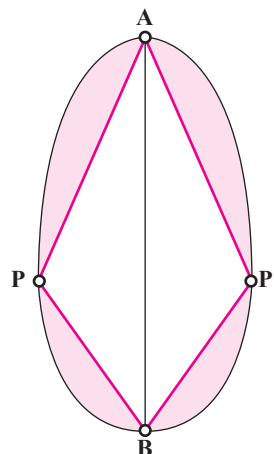
حصار به کار برود، حصار به شکل دایره

درمی‌آید.»

باران متفکرانه گفت: «پس اگر دایره

نباشد، یعنی نقطه‌های داریم که \widehat{APB} زاویه

قائم نیست.»



خانم جمشیدی نگاهی به من کرد و

گفت: «حالا تصور کنید قسمت‌های هاشور

خورده در شکل از تخته سه‌لا ساخته شده‌اند

و در نقاط A ، P ، B و P' آزادانه به هم

متصل‌اند، با فضای خالی $APBP'$ که شما

می‌توانید A و B را به طرف هم بکشید یا از

هم جدا کنید.»

مهتاب گفت: «پس مساحت تخته سه‌لا

ثابت می‌ماند، ولی مساحت داخلی تغییر

می‌کند.»

خانم جمشیدی جواب داد: «و قسمت

داخلی از دو مثلث هم‌نهشت APB و $AP'B$

تشکیل شده است.»

بهار پرسید: «در هر مثلث دو ضلع

ثابت است، ولی زاویه‌های رأس‌های \widehat{P} و \widehat{P}'

می‌توانند تغییر کنند، درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال

شما چطور می‌توانید از مساحت مثلث

استفاده کنید؟»

باران گفت: « AP را به‌عنوان قاعده

می‌گیریم و ارتفاع را از رأس B بر AP عمود

می‌کنیم.»

مهتاب گفت: «ارتفاع ممکن است

کوتاه‌تر از BP باشد، مگر وقتی که زاویه P

قائم باشد. یعنی اگر زاویه P قائمه نباشد،

با حرکت دادن نقطه‌ها به طرف هم یا دور

کردن نقطه‌ها از هم کاری می‌کنیم تا زاویه P

قائم بشود و این حرکت مساحت هر مثلث را

افزایش می‌دهد.»

خانم جمشیدی هم نتیجه‌گیری پایانی

را با لبخند گفت: «دقیقاً همین‌طور است

که می‌گوییم و این یعنی کل مساحت

داخلی منحنی بدون تغییر محیط افزایش

پیدا می‌کند و این موضوع نشان می‌دهد

که منحنی‌های غیردایره هرگز مساحت

ماکزیمم را به ازای محیط مفروض

ندارند.»

امیدوارم که از حل این مسئله زیبا لذت

برده باشید.